

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 9

Baza ortonormalna

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

H – ustalona przestrzeń Hilberta.

Def: Rodzinę wektorów $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ nazywamy układem

- **ortogonalnym**, jeśli $e_i \perp e_j$ dla $i \neq j$ (tzn. $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $i \neq j$).
- **ortonormalnym**, jeśli $e_i \perp e_j$, gdy $i \neq j$ oraz $\|e_i\| = 1$, tzn.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in I.$$

Każdy ortogonalny układ wektorów $\{u_i\}_{i \in I}$ niezerowych można unormować do układu ortonormalnego $\{e_i\}_{i \in I}$ kładąc $e_i := \frac{u_i}{\|u_i\|}$:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\rangle = \frac{\langle u_i, u_j \rangle}{\|u_i\| \|u_j\|} = \delta_{i,j} \cdot \frac{\langle u_i, u_i \rangle}{\|u_i\| \|u_i\|} = \delta_{i,j}.$$

Stw. (Ortogonalizacja Grama-Schmidta)

Jeśli $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq H$ liniowo-niezależne oraz $M = \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$, to

$$u_1 := x_1, \quad u_2 := x_2 - P_{u_1} x_2, \quad \dots, \quad u_n := x_n - \sum_{i=1}^{n-1} P_{u_i} x_n$$

tworzą układ ortogonalny $\{u_i\}_{i=1}^n$ taki, że $M = \text{lin}\{u_1, \dots, u_n\}$.



Stw. Jeśli $M = \text{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$, gdzie $\{e_i\}_{i=1}^n$ układ ortonormalny, to

$$P_M x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \quad \text{dla każdego } x \in H.$$

Ponadto, $\|P_M x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$ dla $x \in H$.

Dowód: Niech $x \in H$. Wtedy $P_M x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{F}$, oraz

$$\begin{aligned} \langle x, e_i \rangle &\stackrel{e_i \in M}{=} \langle x, P_M e_i \rangle \stackrel{P_M = P_M^*}{=} \langle P_M x, e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, e_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle \stackrel{\langle e_j, e_i \rangle = \delta_{i,j}}{=} \lambda_i. \end{aligned}$$

Stąd $P_M x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ oraz

$$\begin{aligned} \|P_M x\|^2 &= \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle e_i, e_j \rangle \stackrel{\langle e_j, e_i \rangle = \delta_{i,j}}{=} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2. \end{aligned}$$



Wn. (Nierówność Bessela)

Dla dowolnego układu ortonormalnego $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ mamy

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in H.$$

Dowód: Niech $A \subseteq I$ skończony i niech $M = \text{lin}\{e_i : i \in A\}$ przestrzeń liniowa rozpięta przez wektory $\{e_i\}_{i \in A}$. Wtedy

$$\sum_{i \in A} |\langle x, e_i \rangle|^2 \stackrel{\text{Stw}}{=} \|P_M x\|^2 \leq \|P_M\|^2 \|x\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Stąd $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sup_{\substack{A \subseteq I \\ \text{skończony}}} \sum_{i \in A} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$ ■

Def. Dla rodziny wektorów $\{x_i\}_{i \in I}$ w przestrzeni unormowanej X , szereg $\sum_{i \in I} x_i$ jest **(bezwzględnie) zbieżny** do wektora $x \in X$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony $K \subseteq I$ taki, że dla dowolnego skończonego $J \subseteq I$ zawierającego K mamy $\|\sum_{i \in J} x_i - x\| < \varepsilon$.

Piszemy wtedy $x = \sum_{i \in I} x_i$.

Def. Bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta H nazywamy układ ortonormalny $\{e_i\}_{i \in I}$, który jest maksymalny, tzn. nie istnieje $e \in H$ taki, że układ $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{e\}$ jest ortonormalny.

Stw. Każda przestrzeń Hilberta posiada bazę ortonormalną. Więcej, każdy układ ortonormalny można rozszerzyć do bazy ortonormalnej.

Dowód: Teza wynika z Lematu Kuratowskiego-Zorna.

Lem. Niech $(\mathcal{P}, \leq)$ częściowo uporządkowany. Jeżeli każdy liniowo uporządkowany $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ ma ograniczenie górne w $\mathcal{P}$, to $\mathcal{P}$ posiada element maksymalny.



Kuratowski



Zorn

Niech $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ będzie ustalonym układ ortonormalnym.

Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich układów ortonormalnych

$\{e'_i\}_{i \in I'} \subseteq H$ rozszerzających $\{e_i\}_{i \in I}$, czyli $\{e_i : i \in I\} \subseteq \{e'_i : i \in I'\}$.

Jest to zbiór częściowo uporządkowany ze względu na relację inkluzji.

Ponadto każda rodzina układów ortonormalnych $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$, która jest liniowo uporządkowana (tzn. jeśli $u, u' \in \mathcal{C}$, to $u \subseteq u'$ albo $u' \subseteq u$) ma ograniczenie górne $\bigcup_{u \in \mathcal{C}} u \in \mathcal{P}$. Zatem na mocy **Lem** istnieje element maksymalny w $\mathcal{P}$.

Tw. (Charakeryzacje bazy ortonormalnej)

Niech $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta H . Następujące warunki są równoważne:

- 1 $\{e_i\}_{i \in I}$ jest **bazą ortonormalną**, tzn. $\{e_i\}_{i \in I}$ jest maksymalnym układem ortonormalnym.
- 2 układ $\{e_i\}_{i \in I}$ jest **liniowo gęsty** w H , tzn. $\overline{\text{lin}\{e_i : i \in I\}} = H$.
- 3 Dla każdego $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$, tzn. w nierówności Bessela zachodzi równość (zwaną **tożsamością Parsevala**).
- 4 Każdy $x \in H$ jest postaci $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, gdzie $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $i \in I$.
De facto wtedy $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$. Liczby $\{\langle x, e_i \rangle\}_{i \in I}$ nazywamy **współczynnikami Fouriera** elementu x w bazie $\{e_i\}_{i \in I}$.

Dowód: Zauważmy, że jeżeli $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ dla pewnych $\lambda_i \in \mathbb{F}$, to

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{j \in I} \lambda_j e_j, e_i \right\rangle = \sum_{j \in I} \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle = \sum_{j \in I} \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i, \quad i \in I.$$

Dowodzi to drugiej części (4).

(1) $\Rightarrow$ (2). Niech $M := \overline{\text{lin}\{e_i : i \in I\}}$ domknięta podprzestrzeń H rozpięta przez $\{e_i\}_{i \in I}$. Jeśli $M \neq H$, to $M^\perp \neq \{0\}$, czyli istnieje $e \in M^\perp$ taki, że $\|e\| = 1$. Wtedy $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{e\}$ jest układem ortonormalnym, co przeczy maksymalności $\{e_i\}_{i \in I}$. Zatem $M = H$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Niech $x \in H$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje zbiór skończony $A \subseteq I$ oraz $v \in M := \text{lin}\{e_i : i \in A\}$ taki, że $\|x - v\| < \varepsilon$. Zauważmy, że $\dim(M) = |A| < \infty$. Zatem

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|P_M x + (x - P_M x)\|^2 \stackrel{\text{Pitagoras}}{=} \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2 \\ &\leq \|P_M x\|^2 + \|x - v\|^2 \quad (\text{bo } \|x - P_M x\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|) \\ &< \|P_M x\|^2 + \varepsilon^2 \stackrel{\text{wzór na } P_M}{=} \sum_{i \in A} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \varepsilon^2 \\ &\leq \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Przechodząc z ε do zera otrzymujemy, że $\|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$. Jest to nierówność przeciwna do nierówności Bessela. Stąd równość.

(3) $\Rightarrow$ (4). Niech $x \in H$ oraz $\varepsilon > 0$. Szereg $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ jest zbieżny (bo zakładamy Parsevala). Zatem istnieje skończony $K \subseteq I$ taki, że dla każdego skończonego $J \subseteq I$ rozłącznego z K mamy $\sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 < \varepsilon$. Stąd

$$\sum_{i \in I \setminus K} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

Weźmy teraz skończony $J \subseteq I$ zawierający K . Dla każdego $i \in I$

$$\langle x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j \in J} \langle x, e_i \rangle \delta_{i,j} = \langle x, e_i \rangle \cdot 1_{I \setminus J}(i).$$

Zatem stosując tożsamość Parsevala do wektora $x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j\|^2 &\stackrel{\text{Parseval}}{=} \sum_{i \in I} |\langle x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, e_i \rangle|^2 \\ &= \sum_{i \in I \setminus J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \sum_{i \in I \setminus K} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dowodzi to równość $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy nie wprost, że istnieje $e \in H$ taki, że układ $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{e\}$ jest ortonormalny. Na mocy założenia $e = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ dla $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $i \in I$. Ale $\lambda_i = \langle e, e_i \rangle = 0$ dla każdego $i \in I$. Zatem $e = 0$, co prowadzi do sprzeczności z warunkiem $\|e\| = 1$.

Wn. Jeśli $\{e_i\}_{i \in I}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta H , to każdy $x \in H$ jest wyznaczony przez swoje współczynniki Fouriera $\{\langle x, e_i \rangle\}_{i \in I}$ za pomocą tzw. **szeregu Fouriera**

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$



Joseph Fourier

Ponadto $\|x\| = \sqrt{\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2}$ (tożsamość Parsevala).

Prz. (Standardowa baza w $\ell^2(I)$)

Niech I dowolny zbiór. Rozważmy przestrzeń Hilberta

$$\ell^2(I) := \{x : I \rightarrow \mathbb{F} : \sum_{i \in I} |x(i)|^2 < \infty\}.$$

Iloczyn skalarny w $\ell^2(I)$ jest dany wzorem $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x(i) \overline{y(i)}$. Standardową bazę ortonormalną stanowią wektory $\{e_i\}_{i \in I}$, gdzie $e_i(j) = \delta_{i,j}$, dla $j \in I$. Jeśli $I = \mathbb{N}$, to $\ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2$ oraz

$$e_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tw. Jeśli $\{e_i\}_{i \in I}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta H , to wzór $(Ux)(i) := \langle x, e_i \rangle$ dla $x \in H$, $i \in I$, zadaje izometryczny izomorfizm $U : H \rightarrow \ell^2(I)$ (**operator unitarny**). Zatem $H \cong \ell^2(I)$.

Dowód: Z tożsamości Parsevala wynika, że $U : H \rightarrow \ell^2(I)$ jest poprawnie określoną izometrią. Liniowość jasna. Surjektywność 

Def. Wymiarem przestrzeni Hilberta H nazywamy moc bazy ortonormalnej tej przestrzeni i oznaczamy $\dim(H)$.

Uw. Wymiar przestrzeni Hilberta jest dobrze zdefiniowany, tzn. każde dwie bazy tej samej przestrzeni mają tę samą moc.



Wynika to Twierdzenia Cantora–Bernsteina ( przeczytać).

Wn. Dwie przestrzenie Hilberta H i K są izometrycznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(H) = \dim(K)$.